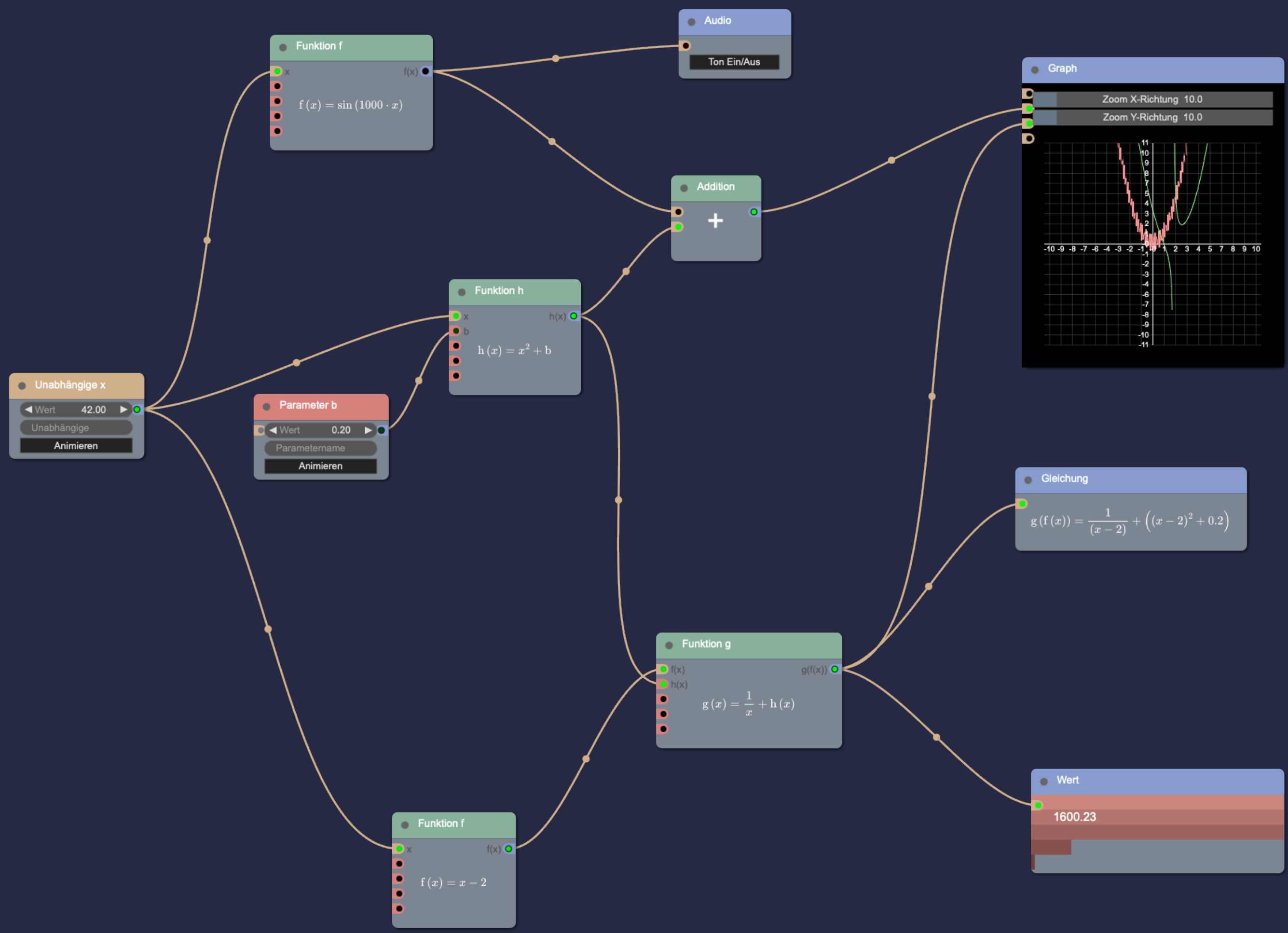
Math-Nodes Arbeitsheft

SPIELERISCH LERNEN MIT FUNKTIONSMASCHINEN

EIN PROJEKT VON NICOLAS REGEL



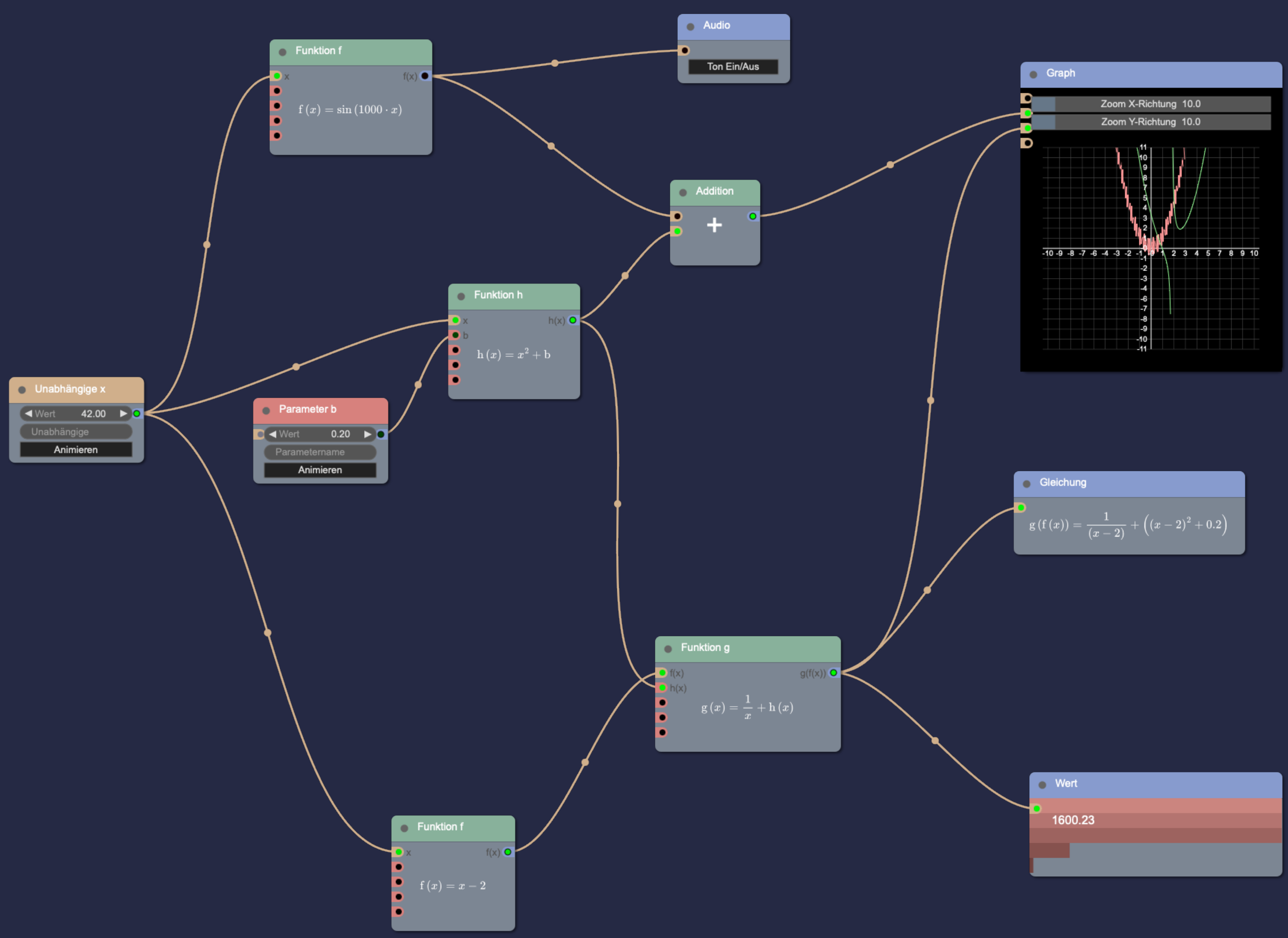
Aufgabenentwicklung:	Nicolas Regel, Paul Busse
Konzeption:	Nicolas Regel
Redaktion:	Nicolas Regel, Paul Busse
Layout:	Nicolas Regel
Feedback, Korrektur:	Andrea Hoffkamp, Lisa Nickolaus, Michael Schröder, Laura Degenhardt

Danksagung:
Ein herzlicher Dank gilt allen Kolleg:innen, Schüler:innen und Unterstützer:innen, die mit Ideen, Rückmeldungen und Motivation zur Entstehung dieses Arbeitshefts beigetragen haben.

Inhaltsverzeichnis

1. Erhebung Math Nodes

Mathematische Funktionen Verknüpfen und Verketten lernen



Funktionen als Maschinen

Eine mathematische Funktion kannst du dir vorstellen wie eine Maschine mit einem Eingang und einem Ausgang. Man gibt etwas in die Maschine hinein und erhält dann etwas am Ausgang der Maschine. Eine wichtige Eigenschaft von Funktionen ist dabei, dass immer das Gleiche am Ausgang herauskommt, wenn wir das Gleiche am Eingang einwerfen.

1 Deine erste Verbindung

Verbinde die unteren Karten wie im Beispiel oben, indem du ein Kabel vom Ausgang der Text-Eingabe-Karte zum Eingang der Text-Ausgabe-Karte ziehst. Wenn du das geschafft hast, klicke auf das Text-Eingabe-Feld auf der Text-Eingabe-Karte und gib etwas ein. Siehst du es auf der Ausgabe-Karte? Du kannst das Kabel auch wieder trennen, indem du es am Ausgang anfasst und die Verbindung von da löst. Versuche es!

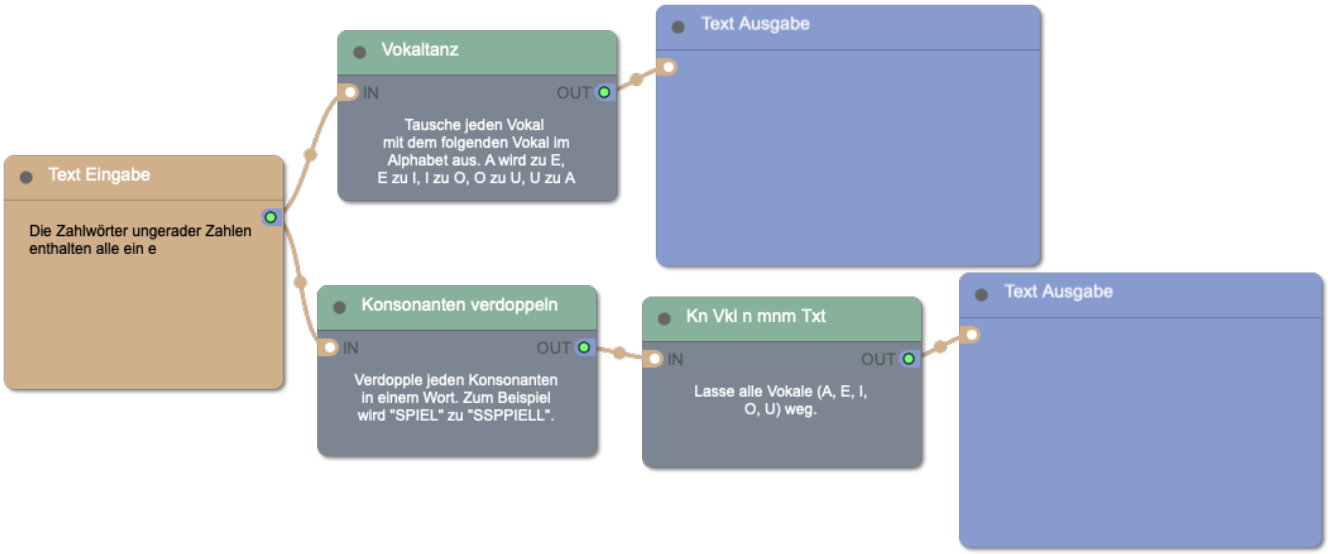
Wenn du zu wenig Platz auf deinem Bildschirm hast, kannst du die Karten über das Menü verkleinern oder den Vollbildmodus nutzen.

2 Deinen ersten Text verschlüsseln

Du kannst deinen Text mit verschiedenen Maschinen (grüne Karten) manipulieren. Verbinde dazu die Text-Eingabe-Karte mit der Vokaltanz-Maschine und diese dann mit der Text-Ausgabe-Karte. Was passiert mit deinem Text?

Neue Karten kannst du über einen Doppelklick in deine Verkabelung laden. Verschaffe dir einen Überblick darüber, welche es gibt! Eine Übersicht findest du auch im Arbeitsheft.

Du kannst natürlich auch mehrere Maschinen hintereinander verwenden. Das nennt man in der Mathematik Verketten. Die Maschinen bilden dann gemeinsam eine neue Maschine, die deinen Text in der verbundenen Reihenfolge verändert. Probiere es aus! Notiere dein Ergebnis im Arbeitsheft.

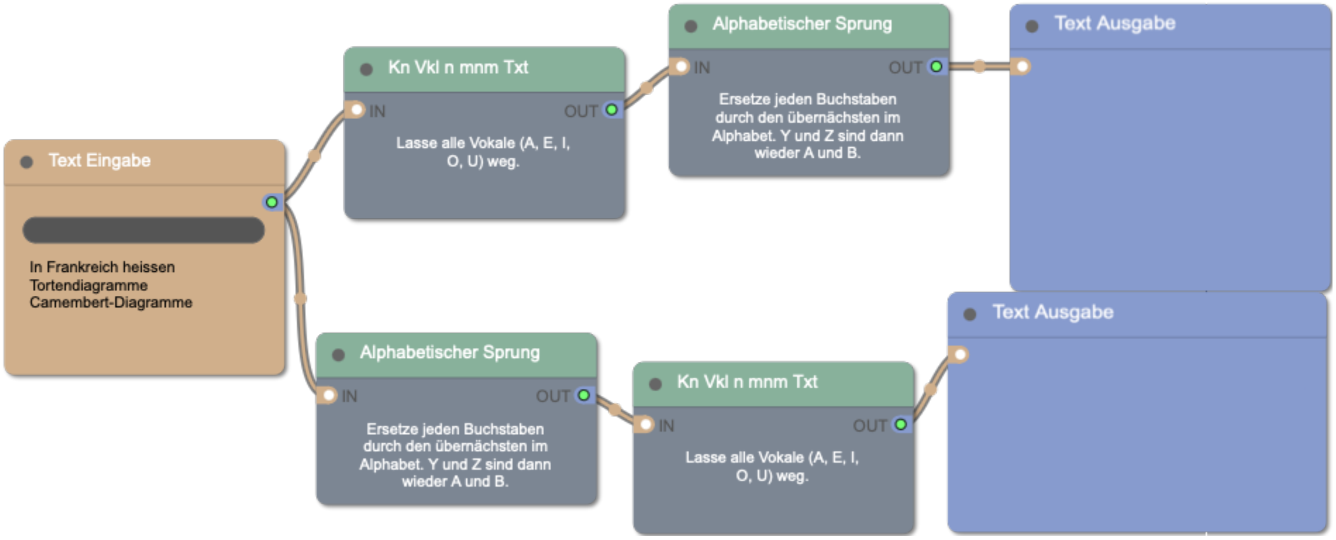


3 Maschinen verketten

Zwei Maschinen kannst du in unterschiedlicher Reihenfolge verbinden. Spielt die Reihenfolge eine Rolle für das Ergebnis?

a) Probiere es aus und begründe deine Antwort im Arbeitsheft.

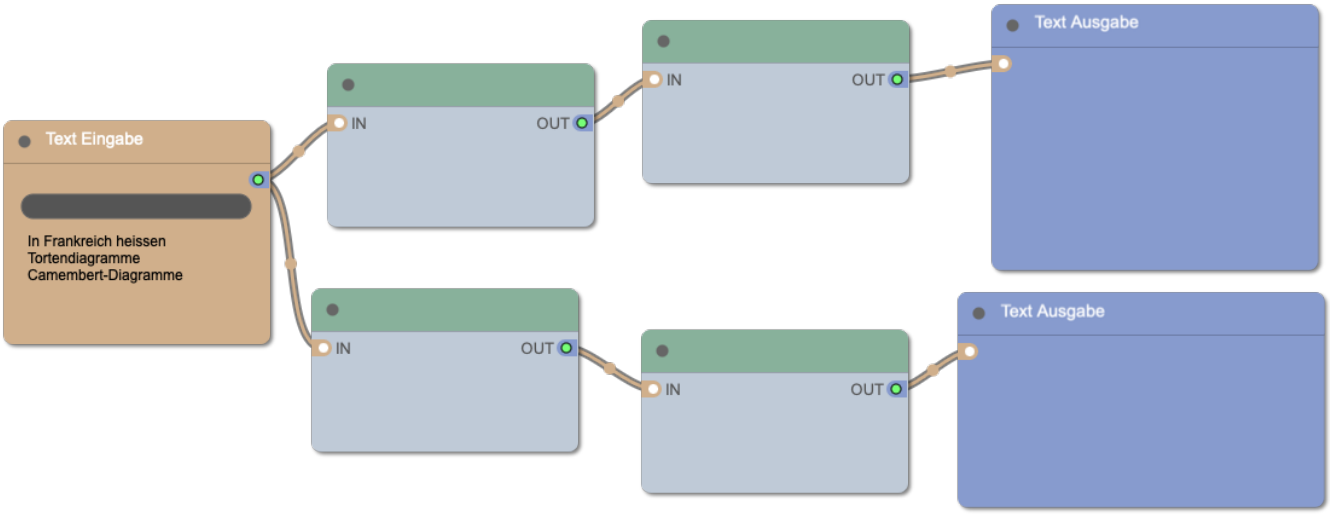
b) Ist das immer so? Findest du zwei, bei denen die Reihenfolge egal ist? Gib die gefundenen Maschinen an, notiere den Ergebnis-Text und erkläre, was hier anders ist.



a) ___

___

___


Text Eingabe
In Frankreich heissen
Tortendiagramme
Camembert-Diagramme
IN
OUT
IN
OUT
IN
OUT
IN
OUT
Text Ausgabe
Text Ausgabe

b) ____

____

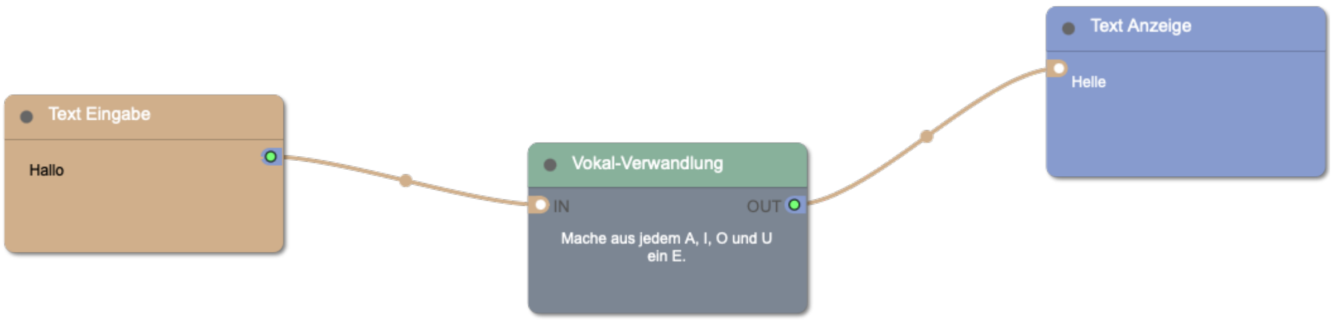
____

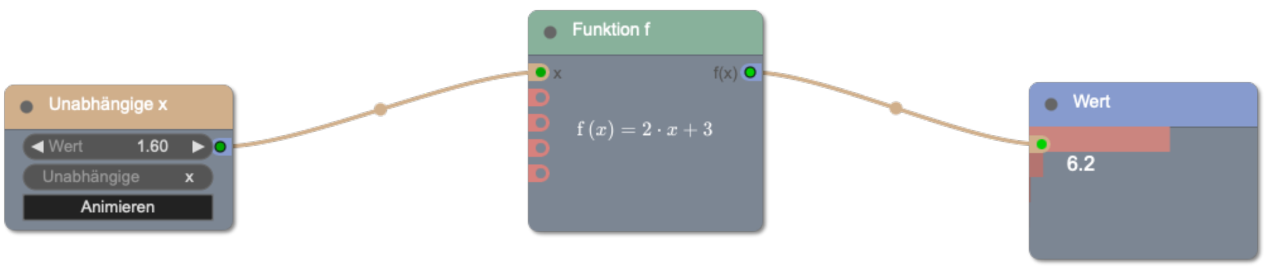
4 Von Wortmaschine zur Funktion

Funktionsmaschinen funktionieren auf die gleiche Weise wie die Wortmaschinen. Genau genommen sind die Wortmaschinen auch spezielle Funktionsmaschinen.

Auch hier gibt es eine Eingabe in Form einer gelben Karte für die unabhängige Variable. Diese wird von einer oder mehreren grünen Funktionsmaschinen verarbeitet und das Ergebnis mit Hilfe von verschiedenen blauen Feedback-Karten angezeigt.

Probiere verschiedene Eingaben an der unabhängigen Variablen aus und beobachte, wie sich die Ausgabe in der Wert-Karte verändert.

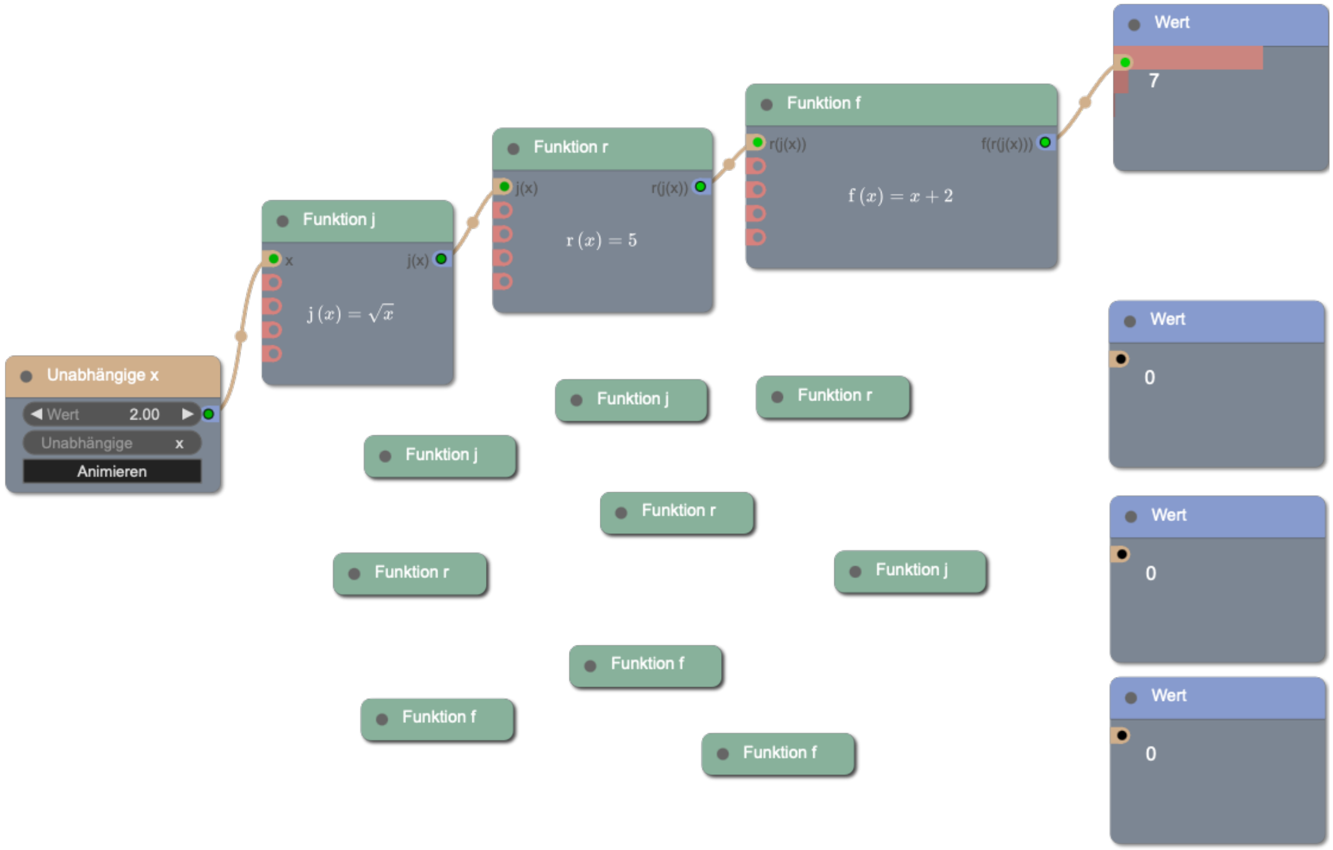




5 Funktionsmaschinen verketten

Genau wie bei den Wortmaschinen kannst du auch Funktionsmaschinen hintereinander schalten. Die Maschinen bilden dann gemeinsam eine neue Maschine, die deinen Wert in der verbundenen Reihenfolge verändert. Probiere verschiedene Kombinationen aus und notiere sie mit den Ergebnissen für die unabhängige Variable $x = 2$ im Arbeitsheft.

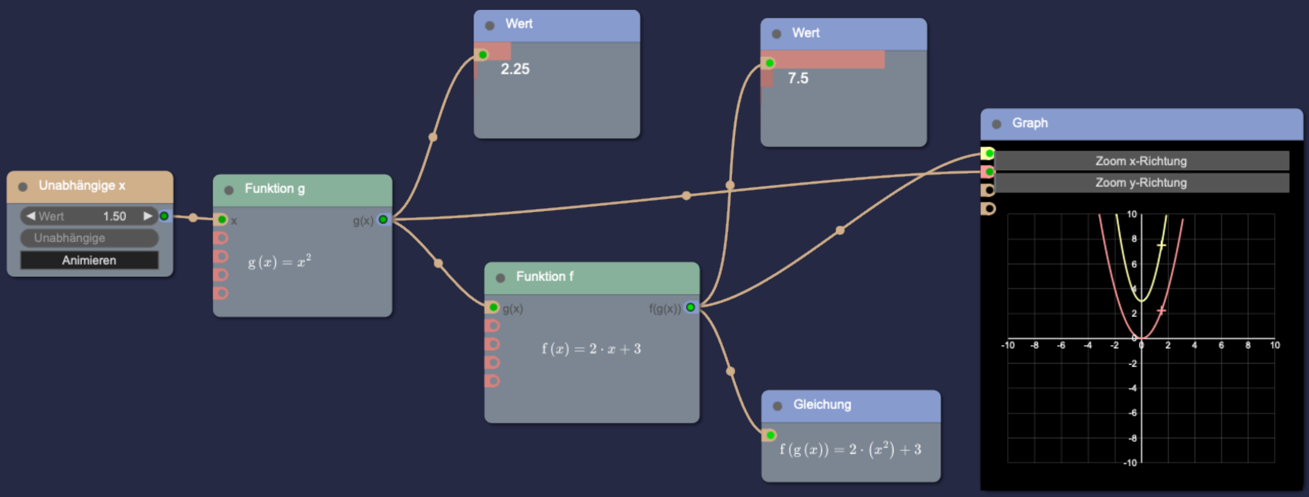
Bonusaufgabe: Wie viele **verschiedene** Maschinen kannst du aus den 3 Funktionsmaschinen bauen, wenn du immer alle Maschinen-Karten verwendest?



Andere Darstellungen der Ausgabe

In Math-Nodes kannst du dir außer dem Wert zu einer unabhängigen Variable auch die Gleichung, den Graphen und sogar den Klang (Kapitel 4) einer Funktionsmaschine ausgeben lassen. Dazu gibt es jeweils eine eigene Feedback-Karte. Feedback-Karten sind immer blau.

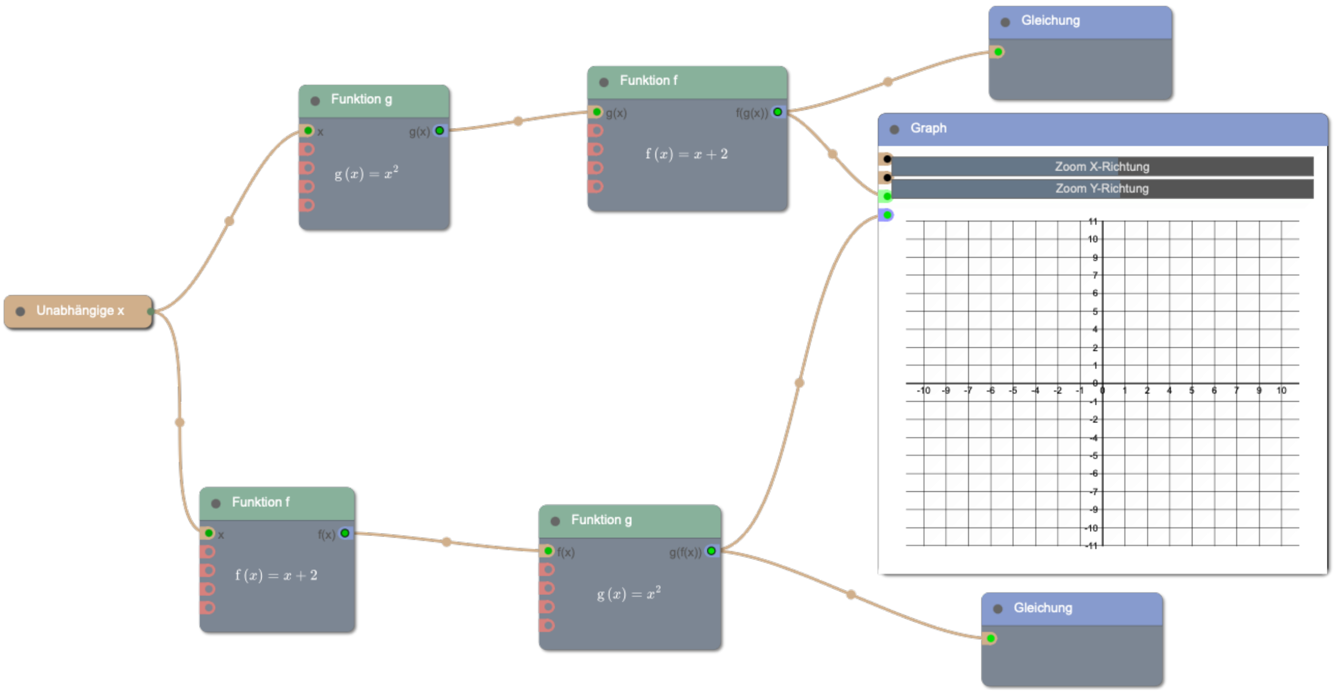
In der Graph-Karte siehst du nicht nur den Graph einer Funktion, sondern auch ein kleines Kreuz. Das ist der Funktionswert für den eingestellten Wert der unabhängigen Variable.



6 Wo ist der Unterschied?

Hier sind zwei Funktionsmaschinen in umgekehrter Reihenfolge verkettet worden. Überlege, wie die Funktionsgleichung der Verkettung lautet und der Graph aussehen müsste und probiere es dann aus.

Skizziere die Graphen und beschreibe, worin sie sich unterscheiden und warum.



Tipp: Funktionsmaschinen einstellen

In vielen Aufgaben in Math-Nodes ist die Struktur, in der verkettet und verknüpft wird, schon vorgegeben und du sollst die passenden Funktions- und Operationsmaschinen auswählen.

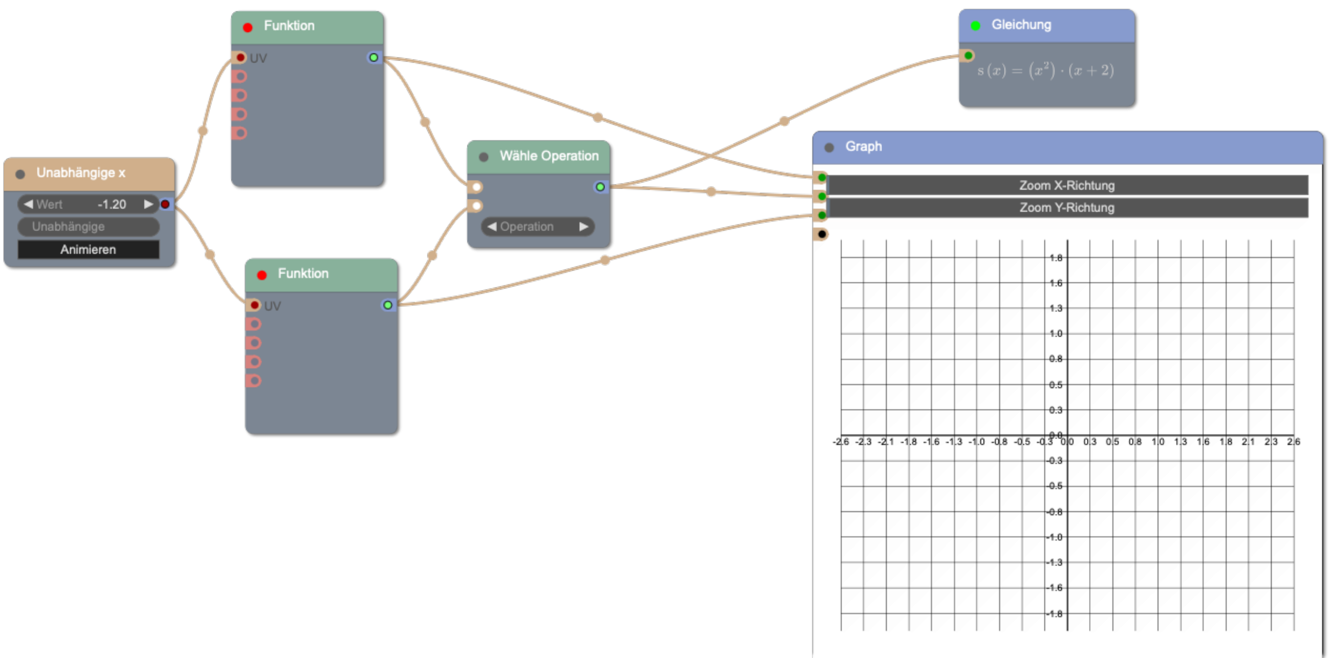
Klickst du mit der rechten Maustaste oder am Tablet mit zwei Fingern auf eine Funktionsmaschine, werden dir ein paar Funktionen vorgeschlagen, mit denen du die Aufgabe lösen kannst oder du kannst die freie Eingabe aktivieren.

7 Verknüpfen und Verketten

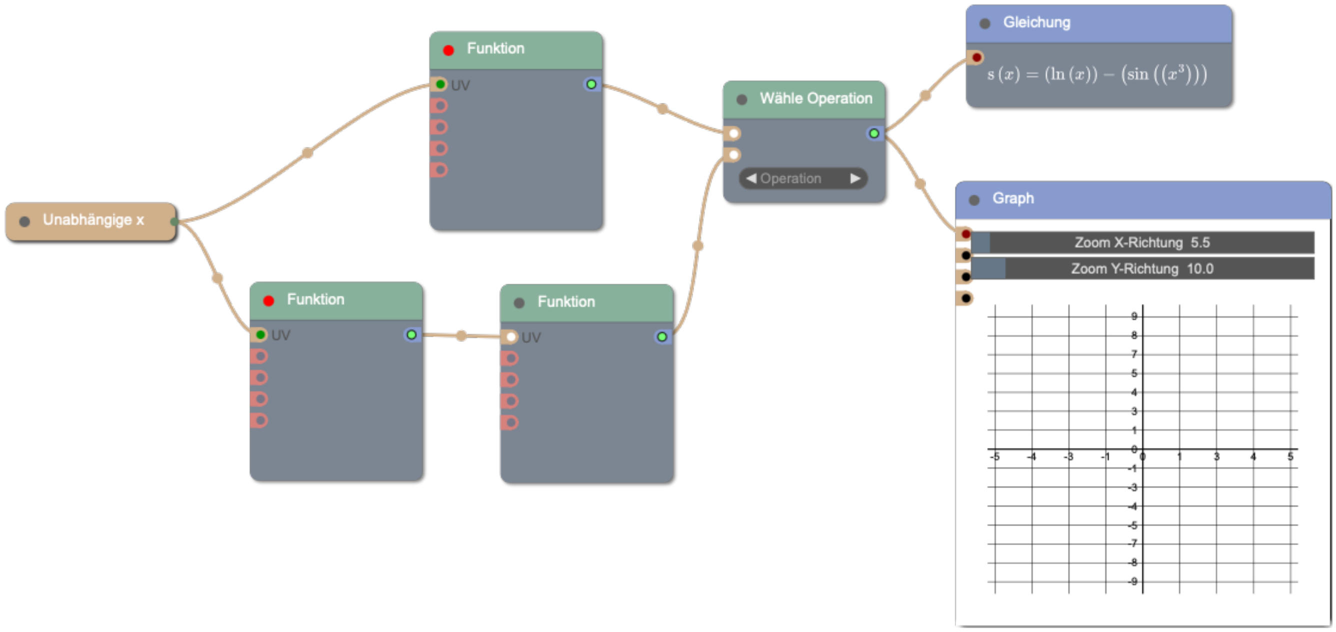
Wähle die Funktionen und die Operation so, dass du den angegebenen Funktionsterm in der Gleichung-Karte erhältst. Notiere deine Lösung und skizziere den Graphen. Beschreibe, welchen Einfluss die einzelnen Maschinen auf den Graphen der Gesamtfunktion haben.

Verbinde Funktionsmaschinen zusätzlich einzeln mit der Graph-Karte. So kannst du den Graphen der resultierenden Gesamtfunktion mit den Teilfunktionen vergleichen.

a)



b)

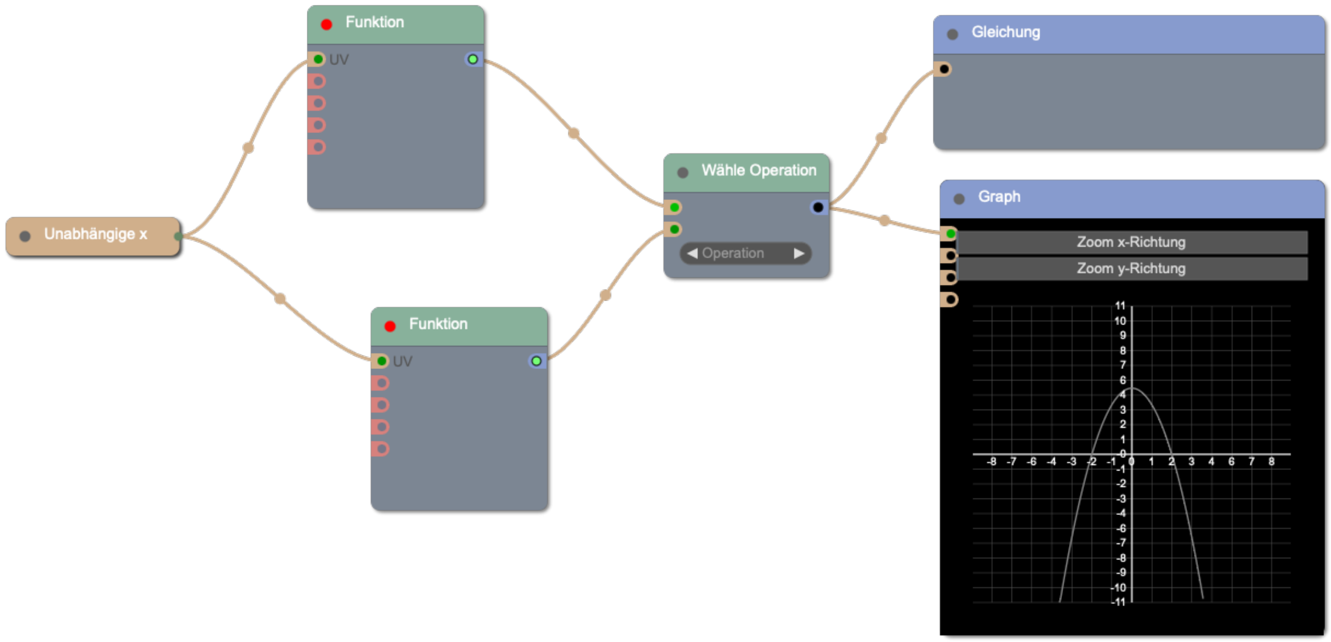

Funktion
UV
Gleichung
s (x) = (ln (x)) − (sin ((x^3)))
Wähle Operation
Operation
Unabhängige x
Graph
Zoom X-Richtung 5.5
Zoom Y-Richtung 10.0
Funktion
UV
Funktion
UV

8 Den Graphen treffen

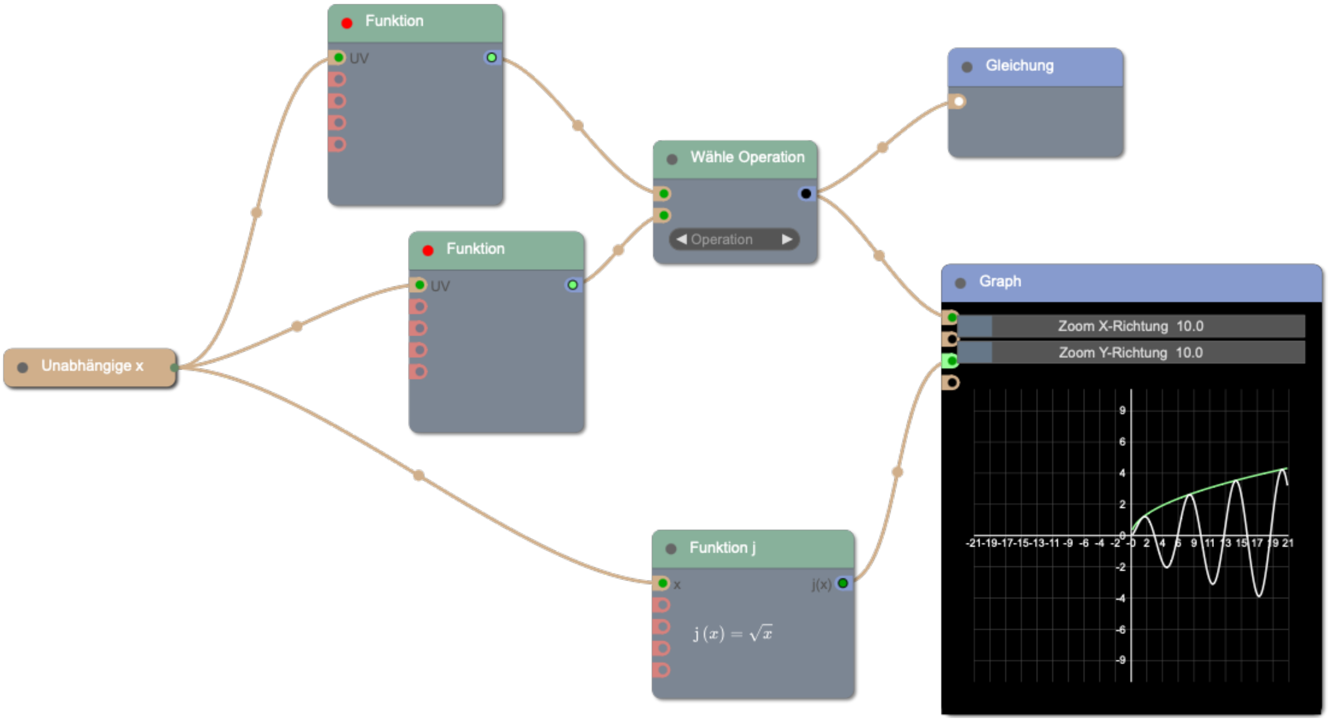
Wähle die Funktionen und die Operation so, dass der weiße Graph entsteht. Notiere die Lösung und erläutere dein Vorgehen.

Für **b:** Erläutere den Zusammenhang zwischen dem weißen und dem grünen Graphen.

a)



b)


Funktion
UV
Funktion
UV
Wähle Operation
Operation
Gleichung
Graph
Zoom X-Richtung 10.0
Zoom Y-Richtung 10.0
Unabhängige x
Funktion j
x
j(x)
$j(x) = \sqrt{x}$

9 Funktionenpuzzle

Verknüpfe und/oder verkette die Maschinen so, dass die weißen Graphen entstehen. Gib jeweils die zugehörige Funktionsgleichung im Arbeitsheft an.

Wenn du es richtig gelöst hast, ist keine Karte übrig.

a) ____________________

____

____

b) ____________________

____

____

c) ____________________

____

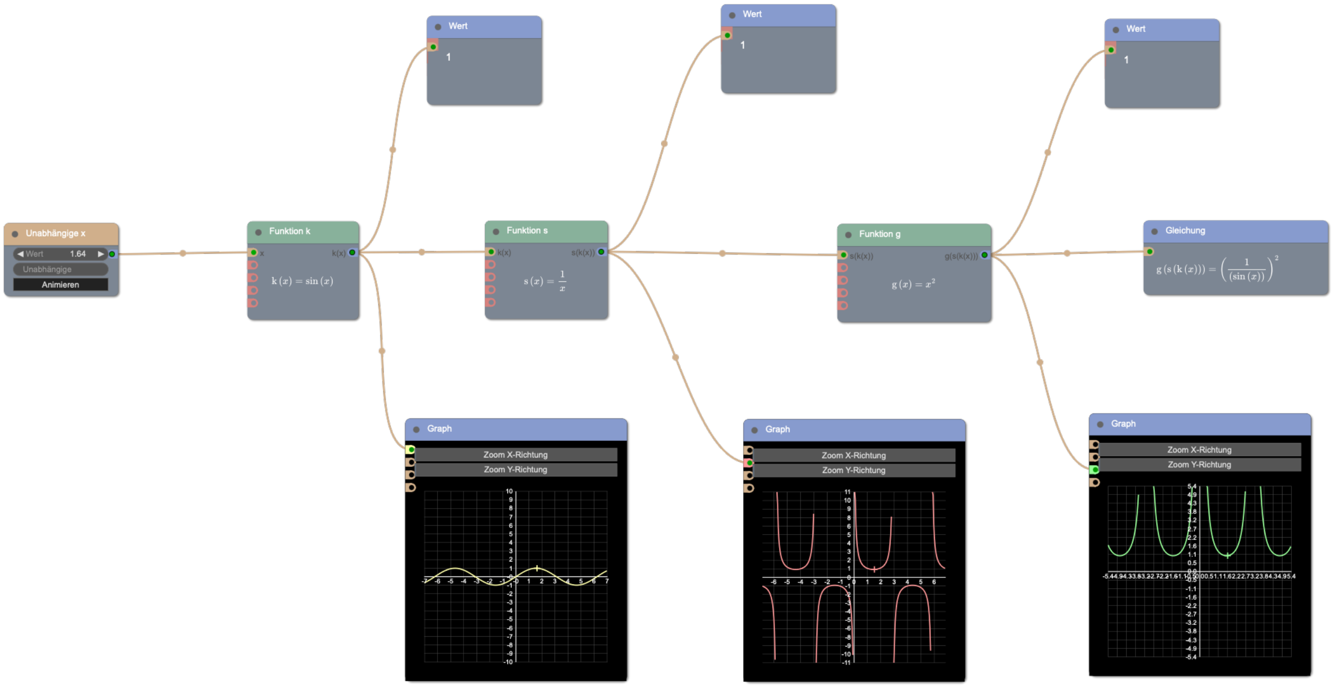
____

10 Graphenwirrwarr

Beschreibe den Zusammenhang zwischen den einzelnen Graphen. Finde besondere Werte für die unabhängige Variable, an denen du das Verhalten des Graphen erklären kannst.

Schau dir die Lösung für das erste Beispiel im Arbeitsheft an.

a)



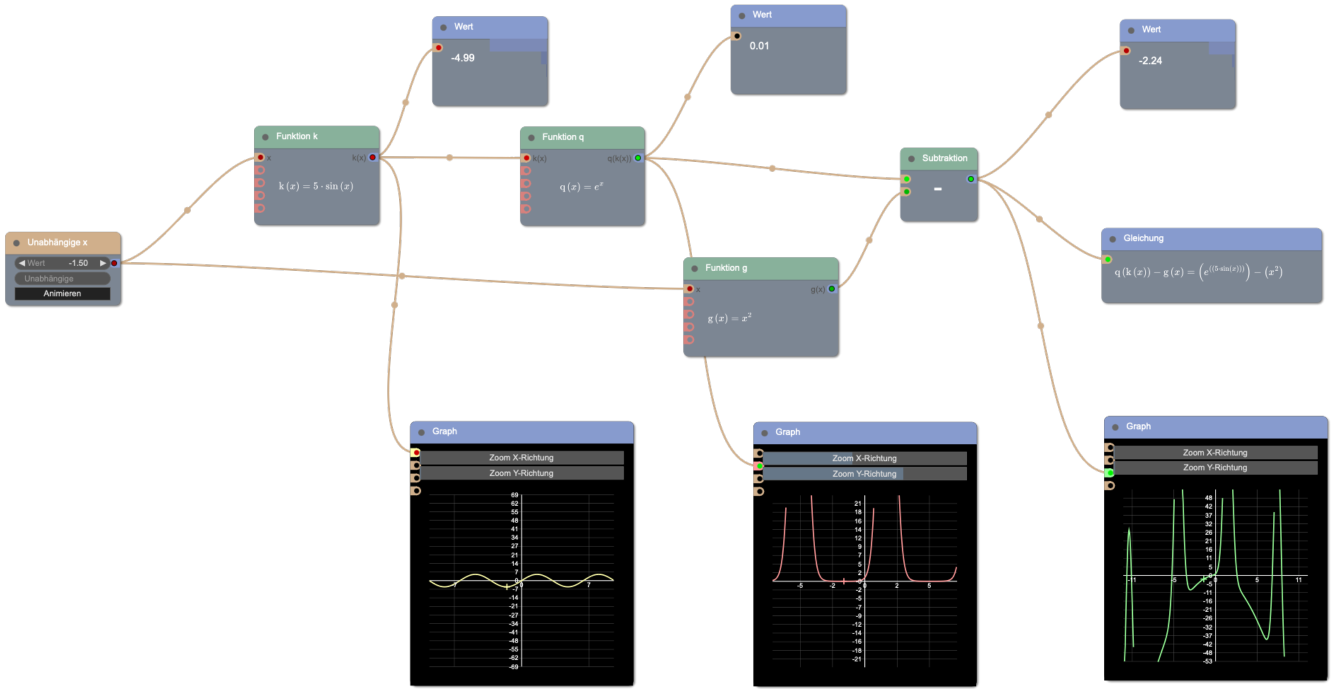
Der erste Graph ist eine Sinusfunktion. Auch die anderen beiden Graphen sind deshalb periodisch.

Besondere Werte für die unabhängige Variable sind die Nullstellen der Sinusfunktion. Diese werden im zweiten Graphen zu Polstellen, weil der Nenner an diesen Stellen null wird.

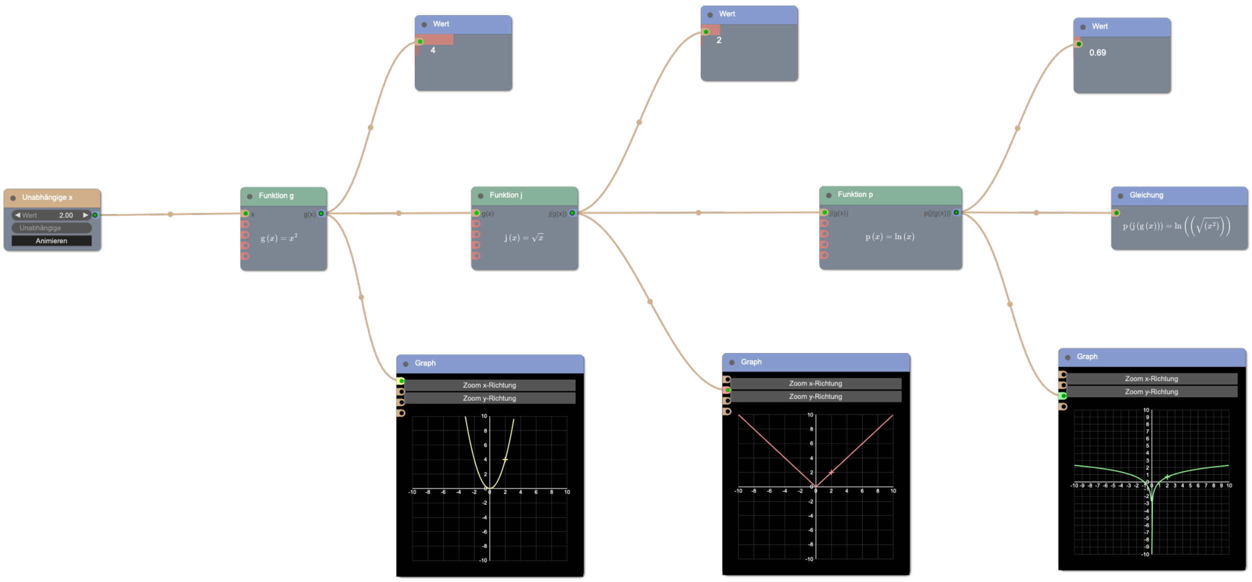
Beim Graphen ganz rechts sind alle Werte durch das Quadrieren positiv.

---

b)


Wert
-4.99
Wert
0.01
Wert
-2.24
Funktion k
k(x)
$k(x) = 5 \cdot \sin(x)$
Funktion q
q(k(x))
$q(x) = e^x$
Subtraktion
–
Gleichung
Unabhängige x
Wert -1.50
Unabhängige
Animieren
Funktion g
g(x)
$g(x) = x^2$
Graph
Zoom X-Richtung
Zoom Y-Richtung
Graph
Zoom X-Richtung
Zoom Y-Richtung
Graph
Zoom X-Richtung
Zoom Y-Richtung

c)


Unabhängige x
Wert 2.00
Unabhängige
Animieren
Funktion g
Funktion j
Funktion p
Wert
4
Wert
2
Wert
0.69
Gleichung
Graph
Zoom x-Richtung
Zoom y-Richtung
Graph
Zoom x-Richtung
Zoom y-Richtung
Graph
Zoom x-Richtung
Zoom y-Richtung

11 Modulation

Betrachte zunächst die Funktionen f und g im ersten Fenster. Welchen Einfluss auf den Graphen haben jeweils die Parameter a und b?

a) Probiere aus und beschreibe im Arbeitsheft.

b) Die Funktionen f und g in der zweiten Verkabelung sehen beinahe aus wie im ersten. Statt der Parameter sind hier aber Funktionen a und b an die Parametereingänge angeschlossen. Beschreibe den Verlauf der Graphen von f und g und den Einfluss der Funktionen a und b auf den Verlauf.

Tipp: Dein Wissen zum Einfluss der Parameter kann dir helfen.

a) ______________________________

____

b) ______________________________

____

____

____

Tipp

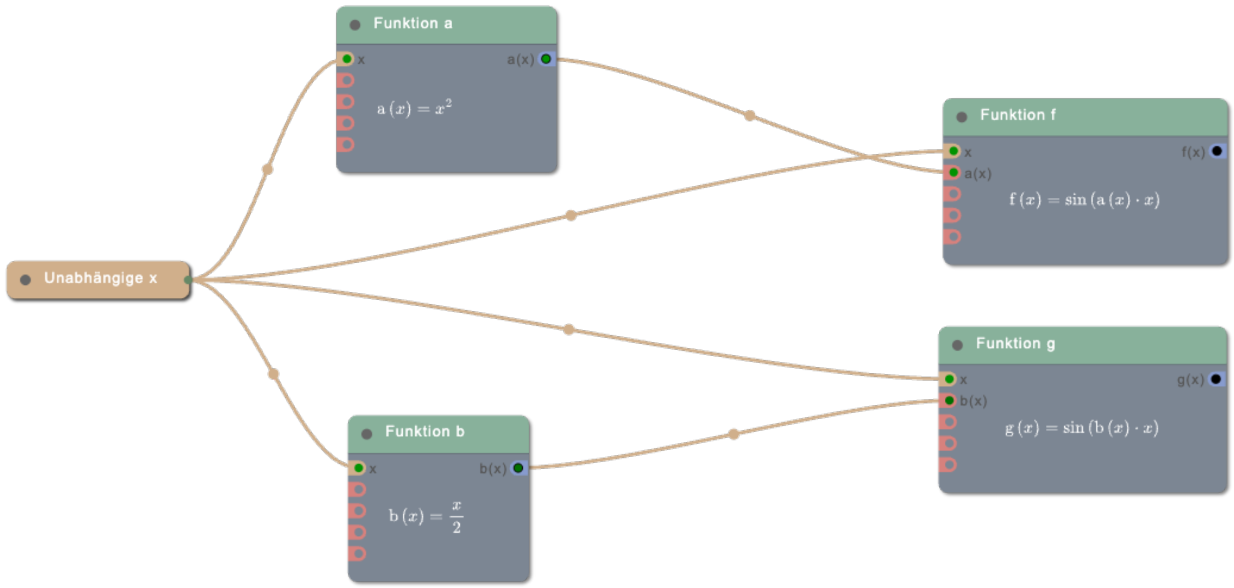
Parameter kannst du dir vorstellen wie Drehknöpfe, mit denen du die Funktion verändern kannst. Du kannst dir Fragen stellen wie: "Was passiert mit der Funktion, wenn dieser Parameter sehr groß oder nahe null ist?"

Manchmal ist es hilfreich, sich Teile einer Funktion vorzustellen, als würden sie einen dieser Drehknöpfe ersetzen. Bei $g(x) = sin(b(x) \cdot x)$ kannst du dir z.B. vorstellen, dass jemand den Drehknopf so bewegt, wie die angeschlossene Funktion $b(x)$ verläuft. Stell dir vor der Parameter b wird zum Beispiel hin und her oder immer schneller hochgedreht. Wenn du weißt, was ein Parameter an der Stelle der Funktion g beeinflussen würde, weißt du auch, was die Funktion b dort macht.

12 Wie verläuft's?

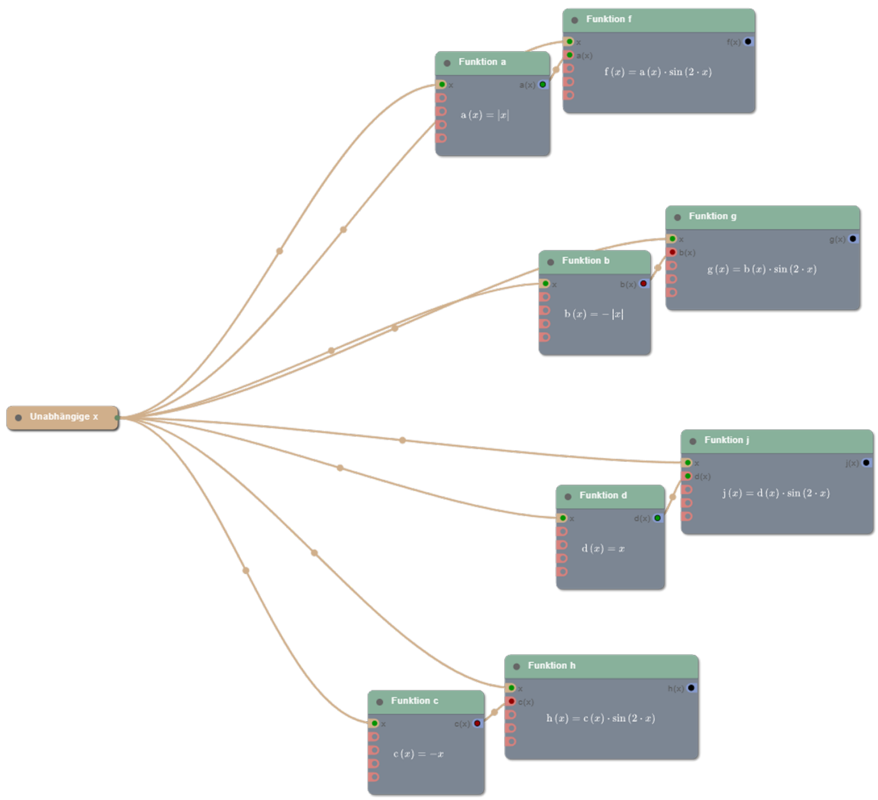
Die Funktionen f und g werden jeweils mit den Funktionen a und b moduliert. Stelle im Arbeitsheft Hypothesen auf, wie sich die Verläufe von f und g unterscheiden, ohne dir die Graphen von f und g anzeigen zu lassen. Überprüfe anschließend deine Hypothesen.

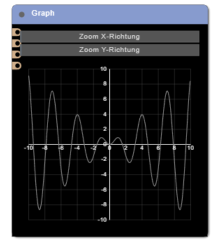
Tipp: Du darfst dir die Graphen von a und b anschauen.

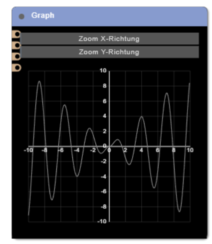


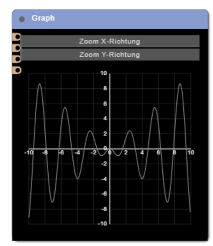
13 Modulationsdetektiv

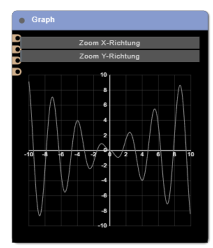
Du siehst hier immer Paare von Funktionen, bei der eine die jeweils andere moduliert. Die modulierte Funktion ist dabei immer gleich. Ordne die Paare den Graphen zu. Begründe deine Zuordnung im Arbeitsheft.







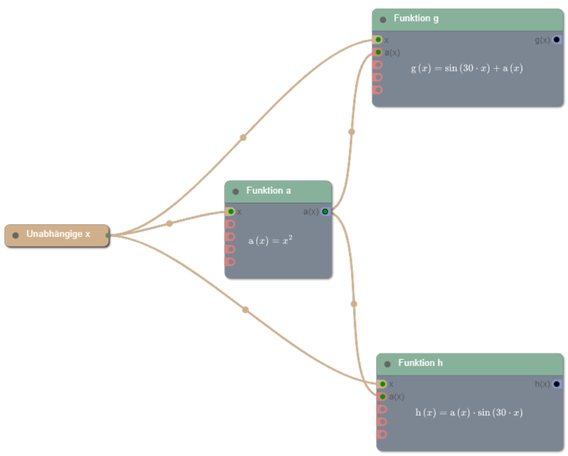


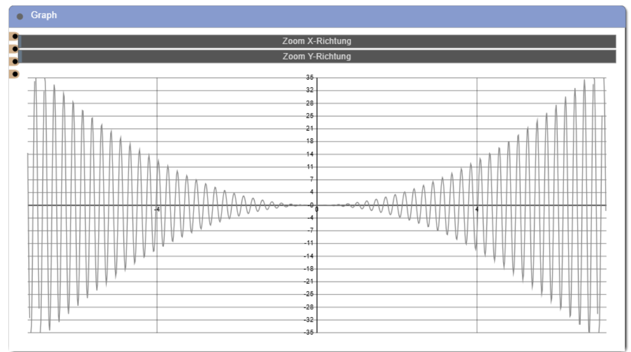


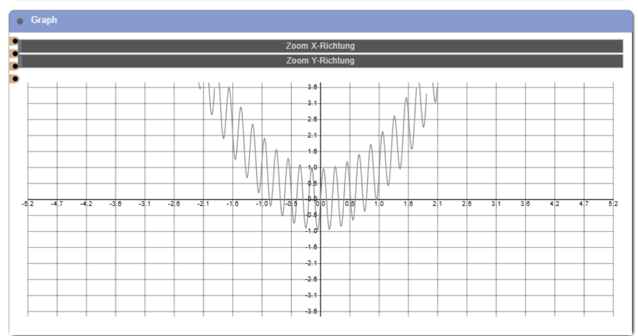
14 Was wurde hier moduliert?

In den Funktionen g und h sind verschiedene Parameter von der gleichen Funktion moduliert worden. Ordne die Funktionen ihren Graphen zu und begründe deine Zuordnung.

Zeichne die Quadratfunktion a in die Graphen im Arbeitsheft ein.





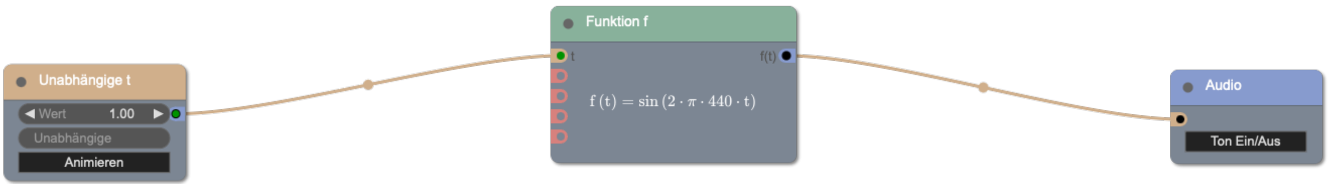


Wie klingt eine Funktion?

Periodische Funktionen sind ein tolles Modell für Töne. Töne sind nämlich physikalisch Schwingungen in der Luft, die sich mit den richtigen Funktionen sehr gut beschreiben lassen. Physikalisch ist die Unabhängige dabei immer die Zeit t. Math-Nodes kann dir aber auch Töne ausgeben, wenn du z.B. x als unabhängige Variable gewählt hast. In den folgenden Beispielen schauen wir uns Stück für Stück an, wie du mit Funktionen Töne erzeugen und in Tonhöhe und Klang verändern kannst.

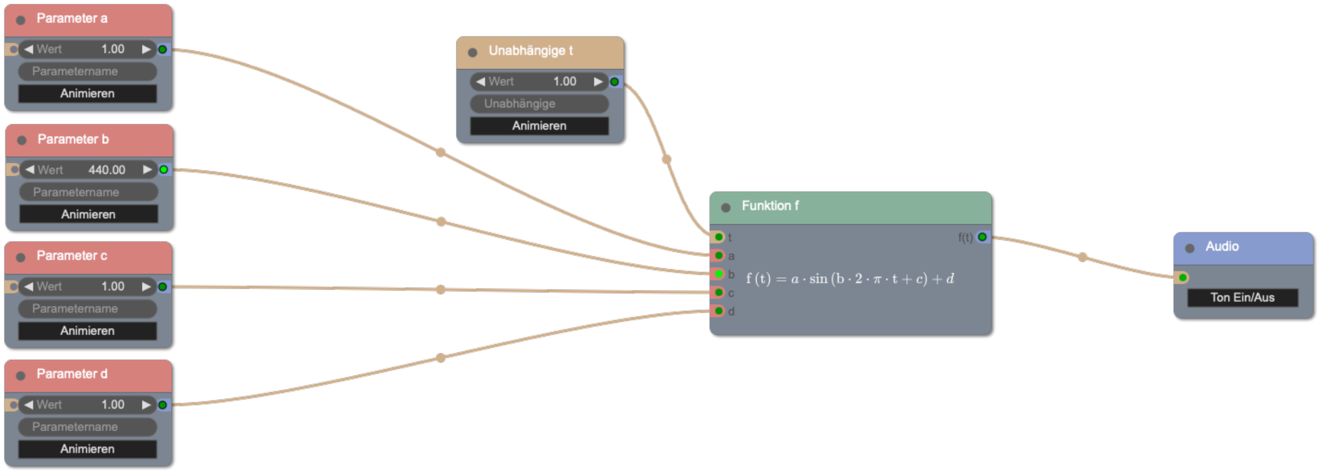
15 Der erste Ton

Um in Math-Nodes einen Ton zu erzeugen, brauchst du mindestens 3 Karten: Eine Karte für die unabhängige Variable, eine Funktionsmaschine und die Audio-Karte. Die Sinusfunktion in diesem Beispiel schwingt 440 mal in der Sekunde hin und her, durchläuft also 2π für $t = 1$ 440 mal. Der entstehende Ton hat also eine Frequenz von 440 Hz. Klicke in der Audio-Maschine auf Ton Ein/Aus, starte die Animation der unabhängigen Variable und schaue, ob du etwas hörst.



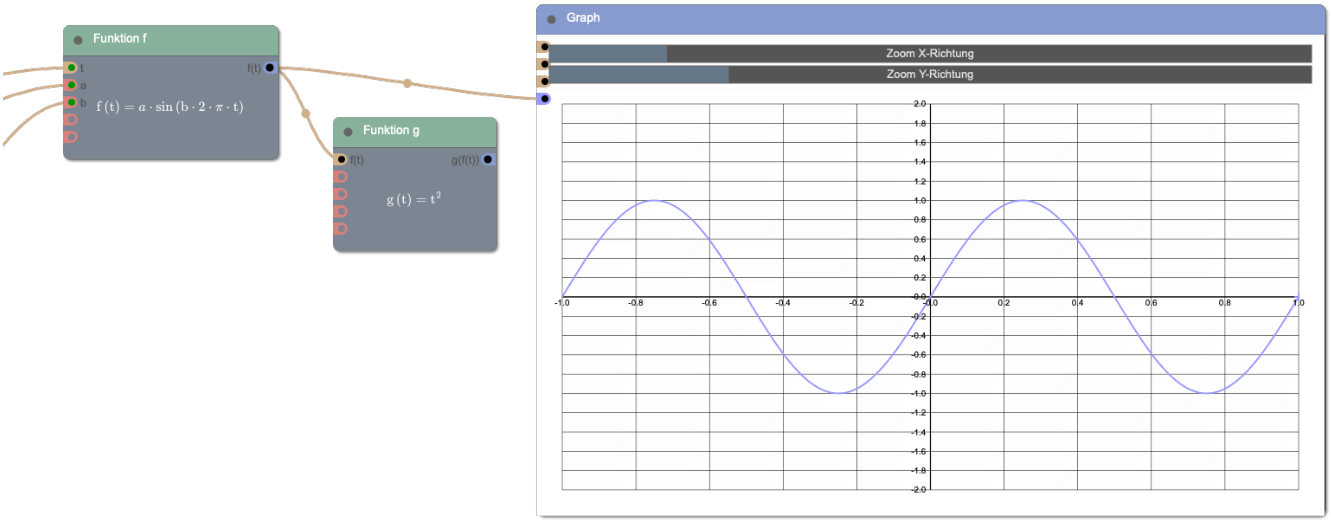
16 Der Einfluss von Parametern

Wenn du bis hier gekommen bist, hast du deinen ersten Ton erzeugt. Klasse! Hier dein erster Forschungsauftrag: Untersuche den Einfluss der Parameter a, b, c, d auf das, was du hörst, also deinen Höreindruck. Verändere dazu die Werte der Parameter an den entsprechenden Karten.



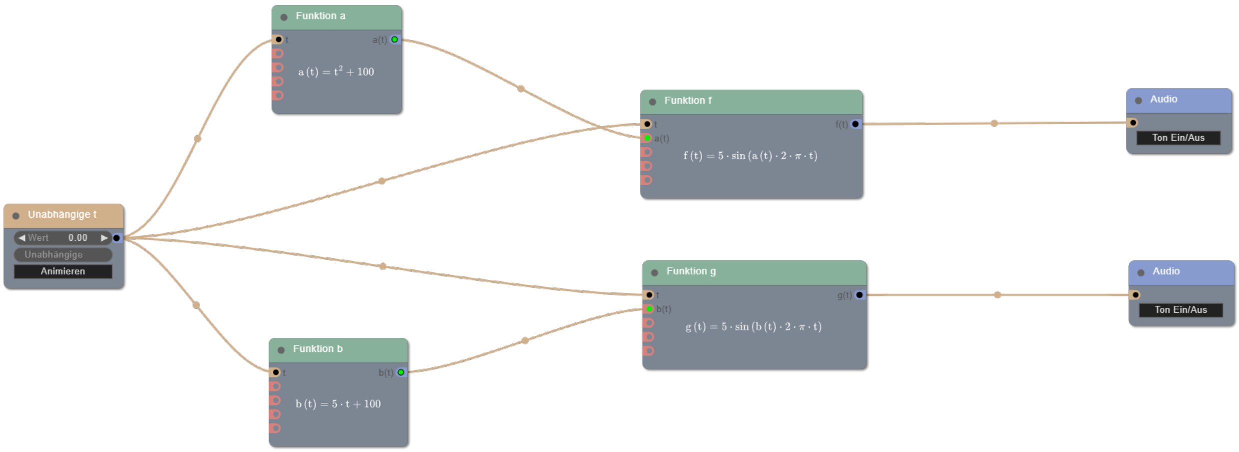
17 Maschinen verknüpfen und mit dem Graph-Modul analysieren

In dieser Aufgabe sollst du die Funktion $f(t) = a{\cdot}\sin(b{\cdot}2\pi{\cdot}t)$ mit der Funktion $g(f(t)) = (a{\cdot}\sin(b{\cdot}2\pi{\cdot}t))^2$ zunächst grafisch und dann auditiv vergleichen. Hast du eine Vermutung, welchen Einfluss auf den Klang die Funktion g hat? Wenn du dir die Funktionen anhören willst, musst du die Frequenz (Parameter b) erhöhen. Menschen können Töne erst ab ca 50 Hz überhaupt als Ton wahrnehmen. Wähle am besten eine Frequenz ab ca. 300 Hz.



18 Warum klingt es anders?

Die Sinusfunktionen f und g werden jeweils mit den Funktionen a und b moduliert. Stelle im Arbeitsheft Hypothesen auf, wie sich die Klänge von f und g unterscheiden. Überprüfe anschließend deine Hypothesen.



19 Wie klingt die Funktion?

Entwirf eine Verkabelung, die der Funktionsgleichung in der Gleichung-Karte entspricht.

Bevor du dir den Ton anhörst, stelle im Arbeitsheft zunächst Vermutungen zum Höreindruck und zum Verlauf des Graphen auf.

a) ______________________________

____

b) ______________________________

____

c) ______________________________

____

20 Wort zu Ton

Erstelle je eine Verkabelung, sodass der entstehende Ton (ab $t = 0$) den folgenden Beschreibungen entspricht. Gib die Funktionsgleichungen im Arbeitsheft an.

a) Der Ton beginnt leise und wird immer lauter.

b) Die Tonhöhe des Tons schwankt periodisch leicht um den Kammerton A 440 Hz.

c) Der Ton beginnt laut, wird dann leiser und nach einer gewissen Zeit wieder lauter. Außerdem soll der Ton stetig höher werden.

d) Die Tonhöhe beginnt sehr hoch, wird sehr schnell tiefer, um dann immer langsamer anzusteigen und nahezu konstant zu bleiben.

e) Der Ton beginnt bei $t = 0$ sehr laut, ist bei $t = 1$ nicht zu hören und wird danach immer langsamer lauter.

a) ______________________________

b) ______________________________

c) ______________________________

d) ______________________________

e) ______________________________

21 Tonmodellierung

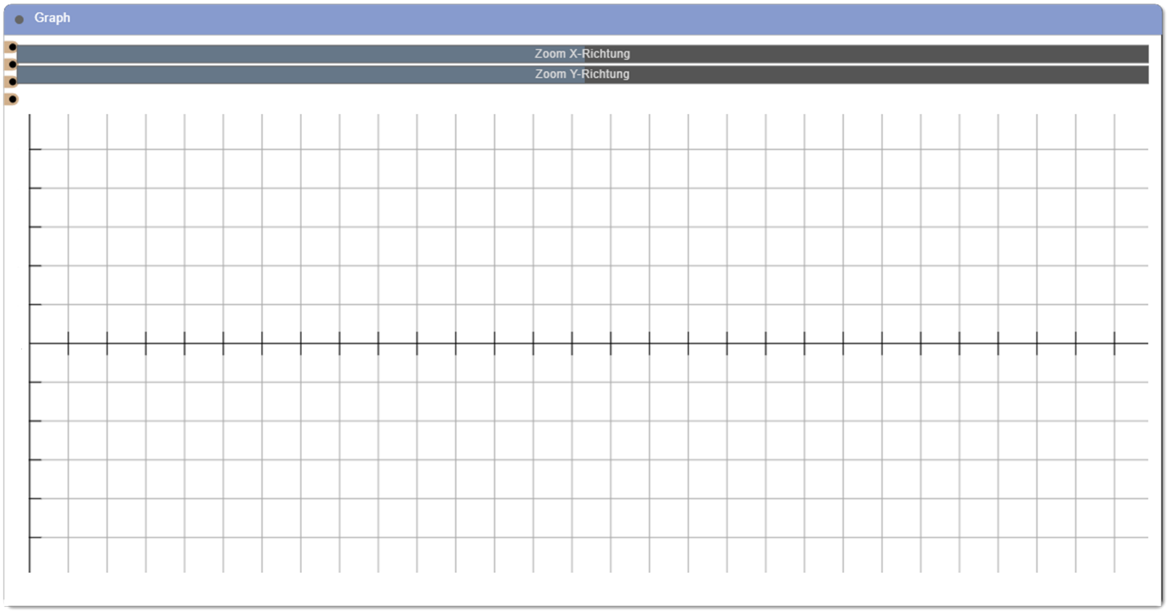
a) Höre dir den Ton an und beschreibe im Arbeitsheft was du hörst. Achte auf Tonhöhe und Lautstärke. Was bleibt gleich? Was verändert sich?

b) Wie könnte der zugehörige Graph aussehen? Skizziere im Arbeitsheft deine Idee. Nutze eine passende Achsenbeschriftung.

c) Entwirf in Math-Nodes eine Verkabelung, die sich genauso anhört wie die untersuchte Audiodatei. Gib im Arbeitsheft die resultierende Funktionsgleichung inkl. der Parameter an.

a) ____

____



b)

c) ____